AGNAGN ゼミ
第 3 章. 熱平衡

菊地 泰輝

2025 年 5 月 30 日

はじめに

- 表や図を議論する際には教科書原本を参照してください.
- 行間はなるべく埋めるようにしました.
- したがって, スライドのうち 60%は原本の内容で残りの 40%は私自身が解釈した内容, 式の導出, 追加の説明です.
- 私自身が解釈した内容は正確ではないので, 何か間違いや議論が不十分な点があれば教えていただけるとありがたいです.

3.1 導入

- 加熱：光電離 (G)
- 冷却：再結合 (L), 輝線による冷却 $\gg$ 自由-自由放射による冷却

熱平衡状態にあるとき,

$$G - L = (\text{輝線}) + (\text{自由-自由}) \tag{1}$$

電離光子 $(h\nu)$ が吸収されたとき, 運動エネルギー $\frac{1}{2}mu^2$ を持つ電子が原子の外に放出される. この過程において, エネルギー保存を考えると

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2}mu^2, \quad h\nu_0 = 13.6\mathrm{eV}(\text{電離エネルギー}) \tag{2}$$

この運動エネルギーを積分することで, 光電離による**全エネルギー注入量**は

$$G(\mathrm{H}) = \int_{\text{電離光子}} (\text{光電子の数}) \times \frac{1}{2}mu^2 \tag{3}$$

$$= \int_{\nu_0}^{\infty} n(\mathrm{H}^0)(\text{光子の数})h(\nu - \nu_0)a_\nu(\mathrm{H}^0)d\nu \tag{4}$$

ここで, $n(\mathrm{H}^0)$: H^0 の数密度, $a_\nu(\mathrm{H}^0)$: 衝突断面積.
H^0 ガスが輻射場 J_ν(intensity) の下にあるとき,

$$(\text{光子の数}) = \frac{4\pi J_\nu}{h\nu} \tag{5}$$

3.2 T_i の定義

従って, 全エネルギー注入量 (単位体積, 単位時間あたり) は

光電離によるエネルギー注入

$$G(\mathrm{H}) = \int_{\nu_0}^{\infty} n(\mathrm{H}^0)\frac{4\pi J_\nu}{h\nu}h(\nu-\nu_0)a_\nu(\mathrm{H}^0)d\nu \tag{6}$$

電離平衡 (H^0 の数がつりあう) を仮定すると

$$n(\mathrm{H}^0)\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{4\pi J_\nu}{h\nu}a_\nu d\nu = n_p n_e \alpha_A(\mathrm{H}^0, T) \tag{7}$$

全エネルギー注入量は次のように書き直せる.

$$G(\mathrm{H}) = n_e n_p \alpha_A(\mathrm{H}^0, T)\frac{\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{4\pi J_\nu}{h\nu}h(\nu-\nu_0)a_\nu(\mathrm{H}^0)d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{4\pi J_\nu}{h\nu}a_\nu d\nu} \tag{8}$$

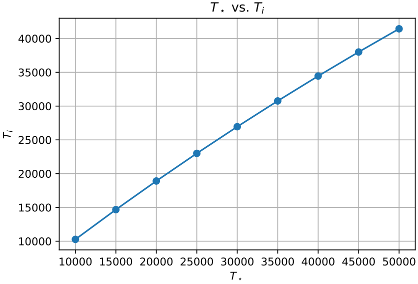
$$=: n_e n_p \alpha_A(\mathrm{H}^0, T)\frac{3}{2}kT_i \tag{9}$$

3.2 T_i の解釈

式 (9) の右辺は T_i の定義であり, 式 (8) における $\frac{1}{2}mu^2$ の"平均"が内部エネルギーに対応するという"気持ち"を反映している.

簡単な例

> 次の簡単な場合を考える; $J_\nu = B_\nu(T_\star), kT_\star < h\nu_0, a_\nu \propto \nu^{-3}$.
> 数値的に積分を実行すると,$T_i \simeq T_\star$ であることがわかる.
> このことは, T_i を光電子の"温度"とみなして良い 1 つの根拠となっている.



3.2 エネルギー硬化 (T_i は星からの距離に依存する)

T_i の空間分布を導こう.
輻射輸送より, $J_\nu(r) = J_\nu(0)e^{-\tau_\nu} = J_\nu(0)e^{-na_\nu r}$.
従って,

$$\frac{3}{2}kT_i(r) = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu(0)}{h\nu} e^{-na_\nu r} h(\nu-\nu_0) a_\nu d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu(0)}{h\nu} e^{-na_\nu r} a_\nu d\nu} \tag{10}$$

不等式 (次のスライド) を用いると, 次が得られる.

$$\frac{3}{2}kT_i(r+dr) = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu(r)}{h\nu} e^{-na_\nu dr} h(\nu-\nu_0) a_\nu d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu(r)}{h\nu} e^{-na_\nu dr} a_\nu d\nu} > \frac{3}{2}kT_i(r) \tag{11}$$

ここで a_ν(フェルミの黄金率によって) 減少関数であることが知られており, $e^{-na_\nu dr}$ は増加関数となるから不等式が適用できる.
すなわち, **星から遠く離れた位置ほど, 光電子の平均エネルギー $\frac{3}{2}kT_i(r)$ は大きくなる.**

補題 (確率の再分配)

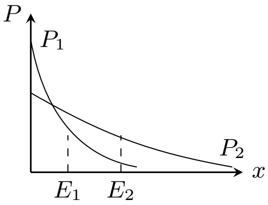
X: 確率変数

$$P_1(x) = f(x)/Z_1, \quad Z_1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \tag{12}$$

$$P_2(x) = f(x)g(x)/Z_2, \quad Z_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx \tag{13}$$

もし $g(x)$ が減少関数ならば

$$\mathbb{E}_{P_1}[X] < \mathbb{E}_{P_2}[X] \tag{14}$$



3.2 エネルギー硬化 (T_i は星からの距離に依存する)

このエネルギー硬化の定性的な説明

- a_ν: 小さい周波数の光子ほど効率的に吸収する.
- 高エネルギー (高周波数) の光子は長い距離を吸収されずに貫通することができる.
- 従って, r が大きい位置での平均エネルギー (T_i) は大きくなる.

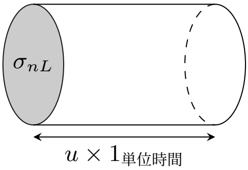
3.3 再結合によるエネルギー損失

電子が量子状態 (n, L) に落ち込むと，その運動エネルギー $\frac{1}{2}mu^2$ が失われる．その $\frac{1}{2}mu^2$ を速度空間で平均すると，

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}mu^2 \sigma_{nL}(\mathrm{H}^0, T) u f(u) du \tag{15}$$

ここで，σ_{nL}: 再結合断面積，$f(u)$: 確率密度 (よくマックスウェル-ボルツマン分布が使われる).
なお $\sigma_{nL} \cdot u$ は円柱の体積を表しており，

$$\sigma_{nL} u \times f(u) du = (\text{速度 } u \text{ を持って再結合する電子の数}) \tag{16}$$



平均エネルギー (15) を状態 (n, L) に亘って足し上げることで, 再結合による全エネルギー損失が得られる.

再結合によるエネルギー損失

$$L_R(\mathrm{H}) = n_e n_p kT \beta_A(\mathrm{H}^0, T) \tag{17}$$

ここで

$$\beta_A(\mathrm{H}^0, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\mathrm{H}^0, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{L=0}^{n-1} \beta_{nL}(\mathrm{H}^0, T) \tag{18}$$

であり,

$$\beta_{nL}(\mathrm{H}^0, T) = \frac{1}{kT} \int_0^{\infty} u \sigma_{nL}(\mathrm{H}^0, T) \frac{1}{2} m u^2 f(u) du \tag{19}$$

なお, 式 (19) の分母 kT は単に無次元化のためである.

$\sigma_{nL} \propto u^{-2}$ であることが知られているので, 低い運動エネルギーを持つ電子ほど捕獲されやすい. 従って,

$$(\text{捕獲される電子の平均エネルギー}) < (\text{捕獲前の電子のエネルギー}) \quad \rightarrow \quad \beta_A kT < \frac{3}{2}kT \tag{20}$$

放射による損失がない H のみからなる星雲では, 熱平衡は

$$G(\mathrm{H}) = L_R(\mathrm{H}) \tag{21}$$

$$n_e n_p \alpha_A(\mathrm{H}^0, T)\frac{3}{2}kT_i = n_e n_p \beta_A(\mathrm{H}^0, T)kT \tag{22}$$

$$\frac{3}{2}kT_i = \beta_A(\mathrm{H}^0, T)kT < \frac{3}{2}kT \tag{23}$$

よって, $T_i < T$ を得る.

一般に, 輻射場 J_ν は星からの放射と散乱光からなる $(J_\nu = J_{\nu s} + J_{\nu d})$. よって,$G(\mathrm{H})$ を次のように書き直すことができる.

$$G(\mathrm{H}) = \int_{\nu_0}^{\infty} n(\mathrm{H}^0) \frac{4\pi(J_{\nu s} + J_{\nu d})}{h\nu} h(\nu - \nu_0) a_\nu(\mathrm{H}^0) d\nu =: G_s + G_d \tag{24}$$

また, $L_R(\mathrm{H})$ も次のように分解することができる.

$$L_R(\mathrm{H}) = n_e n_p kT(\beta_B + \beta_1), \quad \text{where} \quad \beta_B = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \tag{25}$$

なお, $\beta_A = \beta_B + \beta_1$ である.

on-the-spot 近似

準位 $n=1$ への再結合の際に放出された光子が即座に近くで吸収される．$J_{\nu d}$ によるエネルギー獲得と β_1 によるエネルギー損失はつり合うので，単に省くことができる．

この近似を用いると，

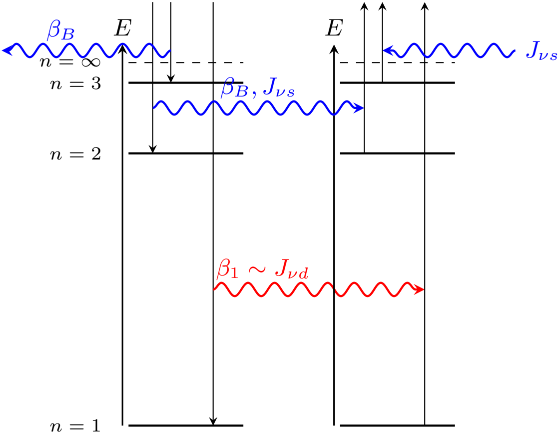
$$G_{\mathrm{OTS}}(\mathrm{H}) = G_s = \int_{\nu_0}^{\infty} n(\mathrm{H}^0)\frac{4\pi J_{\nu s}}{h\nu}h(\nu-\nu_0)a_\nu(\mathrm{H}^0)d\nu \tag{26}$$

$$= n_e n_p \alpha_B(\mathrm{H}^0, T)\frac{\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{4\pi J_{\nu s}}{h\nu}h(\nu-\nu_0)a_\nu(\mathrm{H}^0)d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{4\pi J_{\nu s}}{h\nu}a_\nu(\mathrm{H}^0)d\nu} \tag{27}$$

さらに，

$$L_{\mathrm{OTS}}(\mathrm{H}) = n_e n_p kT\beta_B(\mathrm{H}^0, T) \tag{28}$$

3.3 On-the-spot 近似の大雑把なイメージ



$$E_n = -13.6\mathrm{eV}/n^2$$

He を含めた場合に一般化する.

$$G = G(\mathrm{H}) + G(\mathrm{He}), \quad L_R = L_R(\mathrm{H}) + L_R(\mathrm{H_e}) \tag{29}$$

ここで

$$G(\mathrm{He}) = n_e n(\mathrm{He}^+)\alpha_A(\mathrm{He}^0, T)\frac{\int_{\nu_2}^{\infty}\frac{4\pi J_\nu}{h\nu}h(\nu-\nu_2)a_\nu(\mathrm{He}^0)d\nu}{\int_{\nu_2}^{\infty}\frac{4\pi J_\nu}{h\nu}a_\nu(\mathrm{He}^0)d\nu} \tag{30}$$

であり,

$$L_R(\mathrm{H}) = n_e n(\mathrm{He}^+)kT\beta_A(\mathrm{He}^0, T) \tag{31}$$

他の原子の寄与は十分に小さい. なぜならば, G と L_R は両者とも密度 n に比例するからである.

電荷 Z による自由-自由放射の冷却率は

$$L_{\mathrm{FF}}(Z) = 4\pi j_{\mathrm{ff}} \tag{32}$$

$$= \frac{2^5 \pi e^6 Z^2}{3^{3/2} h m c^3} \left(\frac{2\pi k T}{m} \right)^{1/2} g_{\mathrm{ff}} n_e n_+ \tag{33}$$

$$= 1.42 \times 10^{-27} Z^2 T^{1/2} g_{\mathrm{ff}} n_e n_+ \tag{34}$$

これは電磁気学による結果を用いた.[1].
ここで, g_{ff} は平均 Gaunt 因子と呼ばれ, $1.0 < g_{\mathrm{ff}} < 1.5$ の値を取る.

[1] cf) Radiative Process in Astrophysics by Rybicki & Lightman

3.5 衝突励起で出る輝線によるエネルギー損失

エネルギー差が $\sim kT$ であるイオン (例えば $\mathrm{O}^+, \mathrm{O}^{++}, \mathrm{N}^+$) は冷却を考える上で重要である.
ここでは, 電子がイオンに衝突し, 準位が 1 から 2 に励起されることを考えよう.(**エネルギーギャップ** $\chi = h\nu_{12}$)

Ω の定義

この過程の**励起断面積**は,

$$\sigma_{12}(u) =: \begin{cases} \dfrac{\pi\hbar^2}{m^2u^2}\dfrac{\Omega(1,2)}{\omega_1} & \text{for} \quad \dfrac{1}{2}mu^2 > \chi \\ 0 & \text{for} \quad \dfrac{1}{2}mu^2 < \chi \end{cases} \tag{35}$$

ここで ω_1 は低準位 1 の統計的重みである.
また, ここで**衝突強度** $\Omega(1,2)$ を定義している.

$\sigma \propto u^{-2}$ となっているがこれは**クーロン集束効果** (量子散乱理論より) を反映している.

励起と脱励起の間の**詳細つり合い**を仮定する.

$$n_e n_1 u_1 \sigma_{12}(u_1) f(u_1) du_1 = n_e n_2 u_2 \sigma_{21}(u_2) f(u_2) du_2 \tag{36}$$

ここで, σu は電子が運動する円柱の体積を意味することに再度留意する.
また, u_1 と u_2 は次のエネルギー保存則を満たす.

$$\frac{1}{2} m u_1^2 = \frac{1}{2} m u_2^2 + \chi \quad (\to u_1 du_1 = u_2 du_2) \tag{37}$$

さらに, もう一つボルツマン分布を仮定する.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \exp(-\chi/kT) \tag{38}$$

式 (36), (37),(38) を組み合わせ, $f(u) \propto u^2 \exp\left(-\frac{1}{2} m u^2/kT\right)$ を代入することで,

$$\sigma_{12}(u_1)u_1^2\exp\left(-\frac{1}{2}mu_1^2/kT\right) = \frac{\omega_2}{\omega_1}\exp(-\chi/kT)\sigma_{21}(u_2)u_2^2\exp\left(-\frac{1}{2}mu_2^2/kT\right) \quad (39)$$

$$\omega_1 u_1^2\sigma_{12}(u_1) = \omega_2 u_2^2\sigma_{21}(u_2) \quad (40)$$

よって, 脱励起断面積は次のように求まる.

$$\sigma_{21}(u_2) = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{u_1^2}{u_2^2}\sigma_{12(u_1)} \quad (41)$$

$$= \frac{\pi\hbar^2}{m^2u_2^2}\frac{\Omega(1,2)}{\omega_2} \quad (42)$$

Ω の定義を思い出せば,

Ω の対称性

$$\Omega(1,2) = \Omega(2,1) \quad (\Omega \text{ は対称である}) \quad (43)$$

合計の**衝突脱励起率**は,

$$n_e n_2 q_{21} = n_e n_2 \int_0^\infty u\sigma_{21}(u) f(u) du \tag{44}$$

$$= n_e n_2 \left(\frac{2\pi}{kT}\right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{m^{3/2}} \frac{\Upsilon(1,2)}{\omega_2} \tag{45}$$

ここで, Υ は速度空間で平均した衝突強度である.

$$\Upsilon(1,2) = \int_0^\infty \Omega(1,2;E) \cdot \exp(-E/kT) d\left(\frac{E}{kT}\right), \quad \text{with} \quad E = \frac{1}{2} m u_2^2 \tag{46}$$

また, q_{12} も簡単に計算できる.

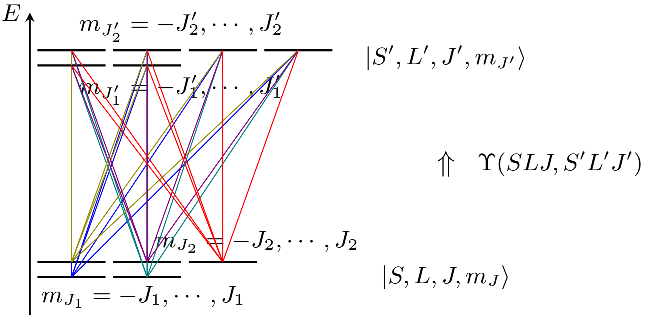
$$q_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} q_{21} \exp(-\chi/kT) \tag{47}$$

Υ は**量子力学**によって計算しなければならない.

いま, 状態 (S, L, J) から状態 (S', L', J')(微細構造) への繊維を考えよう.
;J は合成された角運動量である (”三角ルール” を満たす).

$$\Upsilon(SLJ, S'L'J') = ((S, L, J) \text{ から } (S', L', J') \text{ への衝突強度}) \tag{48}$$

$$\Upsilon(SL, S'L') = \sum_{J,J'} \Upsilon(SLJ, S'L'J') \tag{49}$$



3.5 微細構造の Υ が満たす関係式

一般に, $\Upsilon(SL, S'L')$ の和はとても複雑になる.
もし

- $S = 0$ ならば, $|L - S| \leq J \leq L + S \rightarrow J = L$.
- $L = 0$ ならば, $|L - S| \leq J \leq L + S \rightarrow J = S$.

このような場合には, 和の計算は $\sum_{J,J'} = \sum_{J'}$ と簡単になる.
$|S, L, J, m_J\rangle$ から $|S', L', J', m_{J'}\rangle$ への衝突強度が全て同じ値であると仮定すると,
$\Upsilon(SLJ, S'L'J') \propto 2J' + 1$(縮退度). 従って, 次を得る.

微細構造 Υ 間の関係

$$\Upsilon(SLJ, S'L'J') = \frac{2J'+1}{\sum_{J'=|L-S|}^{L+S}(2J'+1)}\Upsilon(SL, S'L') \tag{50}$$

$$= \frac{2J'+1}{(2S'+1)(2L'+1)}\Upsilon(SL, S'L') \tag{51}$$

例

$^1S \to {}^3P$ を考える (記法; $^{2S+1}L_J$). 関係式は

$$\Upsilon(^1S, {}^3P_0) = \frac{1}{9}\Upsilon(^1S, {}^3P) \tag{52}$$

$$\Upsilon(^1S, {}^3P_1) = \frac{3}{9}\Upsilon(^1S, {}^3P) \tag{53}$$

$$\Upsilon(^1S, {}^3P_2) = \frac{5}{9}\Upsilon(^1S, {}^3P) \tag{54}$$

これらの関係式から, 励起率は $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$ 間のイオンの分布にはほとんど依存しないことが示唆される.

この関係式の活用は技術的な側面においてより重要である.

3.5 詳細つり合いの方程式

励起, 脱励起, 自発放射間の詳細つり合いを書き下すと

$$n_e n_1 q_{12} h\nu_{12} = n_e n_1 q_{21} h\nu_{12} + n_2 A_{21} h\nu_{12} \tag{55}$$

$$n_e n_1 q_{12} = n_e n_1 q_{21} + n_2 A_{21} \tag{56}$$

よって

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_e q_{12}}{A_{21}} \left[1 + \frac{n_e q_{21}}{A_{21}} \right]^{-1} \tag{57}$$

したがって,

冷却率

$$L_C = n_2 A_{21} h\nu_{12} = n_e n_1 q_{12} h\nu_{12} \left[1 + \frac{n_e q_{21}}{A_{21}} \right]^{-1} \tag{58}$$

- $n_e \to 0$

$$L_C = n_e n_1 q_{12} h\nu_{12} \left[1 + \frac{n_e q_{21}}{A_{21}}\right]^{-1} \to n_e n_1 q_{12} h\nu_{12} \tag{59}$$

定積的に説明すると，衝突によって励起した電子は即座に自発放射によって脱励起するということ．

- $n_e \to \infty$

$$L_C \to n_e n_1 q_{12} h\nu_{12} \frac{A_{21}}{n_e q_{21}} = \frac{q_{12}}{q_{21}} n_1 A_{21} h\nu_{21} \tag{60}$$

$$= \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{-\chi/kT} n_1 A_{21} h\nu_{21} \quad \text{(式 (47) を用いた)} \tag{61}$$

ボルツマン分布 $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{-\chi/kT}$ を考えるとこの結果は自然である．

O^{++}, N^{+} , etc などのイオンでは, ^3P などのように複雑なエネルギー準位を持つ．そのような場合, 詳細つり合いの方程式は

$$\sum_{j\neq i} n_j n_e q_{ji} + \sum_{j>i} n_j A_{ji} = \sum_{j\neq i} n_i n_e q_{ij} + \sum_{j<i} n_i A_{ij} \quad \text{for } \forall i \tag{62}$$

となり, 冷却率は

$$L_C = \sum_i L_C^{(i)} = \sum_i n_i \sum_{j<i} A_{ij} h\nu_{ij} \tag{63}$$

- $n_e \to 0$, L_C は式 (59) のような項の和になる．
- $n_e q_{ij} > \sum_{k<i} A_{ik}$ では衝突脱励起が無視できなくなる．

臨界密度

$$n_c(i) = \sum_{j<i} A_{ij} \;/\; \sum_{j \neq i} q_{ij} \tag{64}$$

- $n_e < n_c(i)$, 準位 i の脱励起は無視できる.
- $n_e > n_c(i)$, 無視できない.

3.5 衝突励起で出る H の輝線によるエネルギー損失

- H^+ は束縛状態がないため, 輝線もない.
- H^0 は量は少ないが, 冷却に影響を及ぼす.
- $1\ ^2S$ からの重要な励起
  - $2\ ^2P^0$. Lyα with $h\nu = 10.2$eV
  - $2\ ^2S$. 2 光子減衰 with $h\nu' + h\nu'' = 10.2$eV
- 衝突断面積が u^{-2} のような依存性ではない. 共鳴構造やピークを持つ.
- Υs はとてもゆっくり変化する.

Table 3.16

Effective collision strengths for H I

T(K)	$1\,^2S$, $2\,^2S$	$1\,^2S$, $2\,^2P^o$	$1\,^2S$, $3\,^2S$	$1\,^2S$, $3\,^2P^o$	$1\,^2S$, $3\,^2D$
10,000	0.29	0.51	0.066	0.12	0.063
15,000	0.32	0.60	0.071	0.13	0.068
20,000	0.35	0.69	0.077	0.14	0.073

Anderson, H., Balance, C. P., Badnell, N. R., & Summers, H. P. 2000, J.Phys.B, 33, 1255.

ここまで議論した全てを含めると, 最終的な熱平衡は

$$G = L_R + L_{\mathrm{FF}} + L_C \tag{65}$$

- $n_e \to 0$ では, $G, L_R, L_{\mathrm{FF}}, L_C$ は全て n_e およびイオンの密度 n_{ion} に比例する. よって, $(G, L_R, L_{\mathrm{FF}}, L_C) = n_e n_{\mathrm{ion}}(g, l_R, l_{\mathrm{FF}}, l_C)$ と書くことができる. ここで,$(g, l_R, l_{\mathrm{FF}}, l_C)$ は n_e および n_{ion} に依存しない.
  すると

  $$g = l_R + l_{\mathrm{FF}} + l_{\mathrm{C}} \tag{66}$$

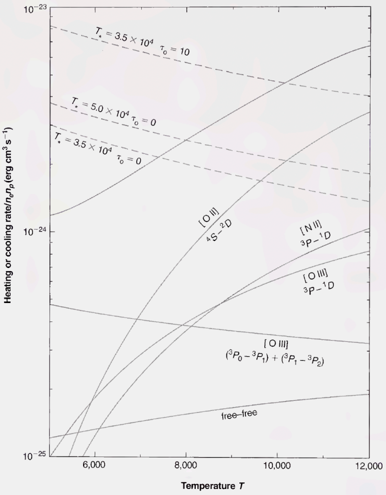
  となり, 導かれる温度 T は n_e および n_{ion} に依存しない.
- $n_e > n_c(i)$ では, 衝突脱励起が無視できない.
  $\to$ 冷却率が減少する.
  $\to$ 平衡温度は高くなる.

次の設定を考える.

- $n(\mathrm{O})/n(\mathrm{H}) = 7 \times 10^{-4}, n(\mathrm{Ne})/n(\mathrm{H}) = 9 \times 10^{-5}, n(\mathrm{N})/n(\mathrm{H}) = 9 \times 10^{-5}$
- O, Ne,N : 80%が 1 階電離, 20%が 2 階電離.
- $n(\mathrm{H}^0)/n(\mathrm{H}) = 1 \times 10^{-3}$

図 3.2 に冷却率が描かれている.

- T 依存性
  - $kT \ll \chi$, 寄与は少ない.
  - $kT \sim \chi$, 寄与が急速に増加する.
  - $kT \gg \chi$, ゆっくりと減少する.
- 低い T: O^{++} が最も寄与する.
- 高い T: O^{+} が最も寄与する.
- H^0 の寄与はどの温度 T においても小さい.



10^{-23}
10^{-24}
10^{-25}
Heating or cooling rate/$n_e n_p$ (erg cm^3 s^{-1})
$T_* = 3.5 \times 10^4$ $\tau_0 = 10$
$T_* = 5.0 \times 10^4$ $\tau_0 = 0$
$T_* = 3.5 \times 10^4$ $\tau_0 = 0$
[O II] $^4S - ^2D$
[N II] $^3P - ^1D$
[O III] $^3P - ^1D$
[O III] $(^3P_0 - ^3P_1) + (^3P_1 - ^3P_2)$
free–free
6,000
8,000
10,000
12,000
Temperature T

Figure 3.2

$$(\text{実行加熱率}) = G - L_R = L_{\mathrm{FF}} + L_C \tag{67}$$

- 図 3.2 では, 点線 $(G - L_R)$ と実線 (L_C) の交点が熱平衡の解であり, その典型的な値は $T \sim 7000\mathrm{K}$.
- 高い n_e では, 冷却は衝突脱励起によって抑制され, 温度 T は低い n_e のときよりも随分高くなる.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P_2}[X] - \mathbb{E}_{P_1}[X] &= \frac{1}{Z_2}\int_{\mathbb{R}} xf(x)g(x)dx - \frac{1}{Z_1}\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx && (68)\\
&= \frac{1}{Z_1 Z_2}\left[Z_1\int_{\mathbb{R}} xf(x)g(x)dx - Z_2\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx\right] && (69)\\
&= \frac{1}{Z_1 Z_2}\left[\int_{\mathbb{R}^2} xf(x)g(x)f(y)dxdy - \int_{\mathbb{R}^2} xf(x)g(y)f(y)dxdy\right] && (70)
\end{aligned}
$$

2 重積分について.

$$
\int_{\mathrm{R}^2} f(x)f(y)[xg(x) - xg(y)]dxdy =: I \tag{71}
$$

対称性の"トリック"によって

$$
I = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}^2} f(x)f(y)[xg(x) - xg(y) + yg(y) - yg(x)]dxdy \tag{72}
$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{R}^2} f(x) f(y) (x - y)(g(x) - g(y)) dx dy \tag{73}$$

もし $g(x)$ が増加関数ならば

$$x - y > 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) - g(y) > 0 \tag{74}$$

が成り立ち, 従って

$$I > 0 \tag{75}$$

$$\mathbb{E}_{P_2}[X] - \mathbb{E}_{P_1}[X] = \frac{I}{Z_1 Z_2} > 0 \tag{76}$$

$$\mathbb{E}_{P_2}[X] > \mathbb{E}_{P_1}[X] \tag{77}$$

■