

McLean 輪読第 3 回 p.167-181

学籍番号 05-162003 理学部天文学科 4 年 小川貴士

2017 年 5 月 10 日

5.2 Spectrometers

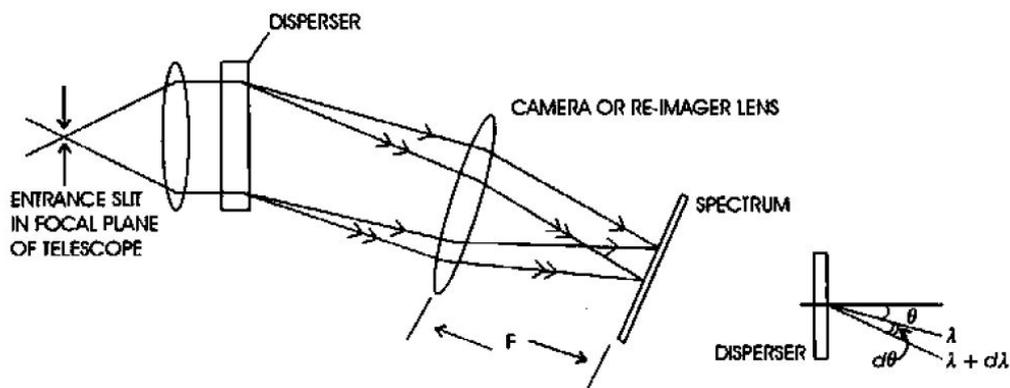


図 1 Spectrometer

- 狭いスリットのある覆い
- スリット幅は以下のどちらかに一致する必要がある
 - シーイングのサイズ
 - 回折円盤 (Airy disk)

重要なのは以下の 5 点

- 分解能 R
- スリット幅
- collimated されたビームサイズ
- 検出器のピクセルに合った、sampling/matching スリット幅
- F 値 $f/number$

5.2.1 Resolution and dispersion

いくつかの用語解説

Angular dispersion(AD):角分散

$$AD = \frac{d\theta}{d\lambda} \quad (1)$$

波長 λ の変化に対する分光角の変化率

Linear dispersion(LD): 線分散

$$\begin{aligned} LD &= \frac{dx}{d\lambda} \\ &= \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \\ &= f_{cam} \frac{d\theta}{d\lambda} \end{aligned}$$

波長 λ の変化に対するスリット位置 x の変化

*1 *2

Resolving power(R):分解能

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (4)$$

ただし、区別したい2つの波長 λ_1, λ_2 を用いて $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ である。しばしば、

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{c} \quad (5)$$

とも表される。*3

*1

$$\begin{aligned} f_{cam} \tan \theta &= x \\ f_{cam} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta &= dx \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\theta \sim 0$ より

$$\frac{dx}{d\theta} \sim f_{cam} \quad (3)$$

*2 逆線分散もある (逆数をとるだけ)。

*3 最右辺は Doppler 効果による。

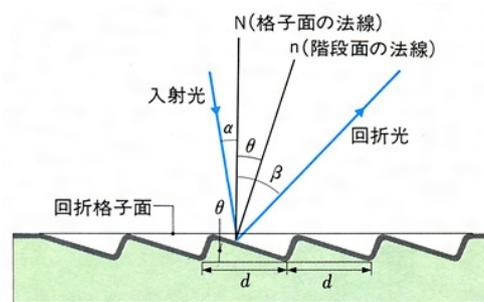
5.2.2 Diffraction gratings(回折格子)

基本関係式

$$m\lambda = d(\sin i + \sin \theta) \cos \gamma, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

ここで、

- d : スリット/溝同士の間隔
- i : 入射角 (angle of incidence)
- θ : 射出角 (angle of emergence)
- γ : 入射面からのズレの角度
- m : 干渉の次数



回折格子の前面はアルミニウム膜などをつけて反射率が高められている

図2 回折格子 (c)Shogakukan

- $m = 0$ のとき、 $\theta = -i$ で鏡面反射。負号は'普通の'の透過と同じ側を正としたことによる。
- 透過の場合も反射の場合も上記の式が使える。
- 真空でない場合は $(n_1 \sin i + n_2 \sin \theta)$ のように屈折率 n がつく。

(5) 式より

$$\begin{aligned} md\lambda &= d \cos \theta \cos \gamma d\theta \\ \therefore \frac{d\theta}{d\lambda} &= \frac{m}{d \cos \theta \cos \gamma} \\ &= \frac{\sin i + \sin \theta}{\lambda \cos \theta} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。^{*4}

- 通常、 $\cos \gamma \sim 1$ であり、角分散は i, θ によって決まる。
- m, d の組み合わせにより、回折格子の角度を変えずに同じ角分散を実現できる。^{*5}

^{*4} テキストでは分母に $\cos \gamma$ がついているが、誤植と思われる...?

^{*5} 典型的な $m \sim 1$ での値は、 $T \equiv 300 - 2400$ [grooves or lines/millimeter] である。 $T = 1/d$ は格子定数。

- $\cos \theta \sim 1$ にしてゆっくりと変えていくと、角分散はほぼ一定 \rightarrow 線分散 $LD = f_{cam} \frac{d\theta}{d\lambda}$ はほぼ線形。
- エシェレ回折格子: d を大きくし ($T = 20 - 200$ 、高次の $m = 10 - 100$ を用いる回折格子。 i, θ が大きく、分解能が高い。*6

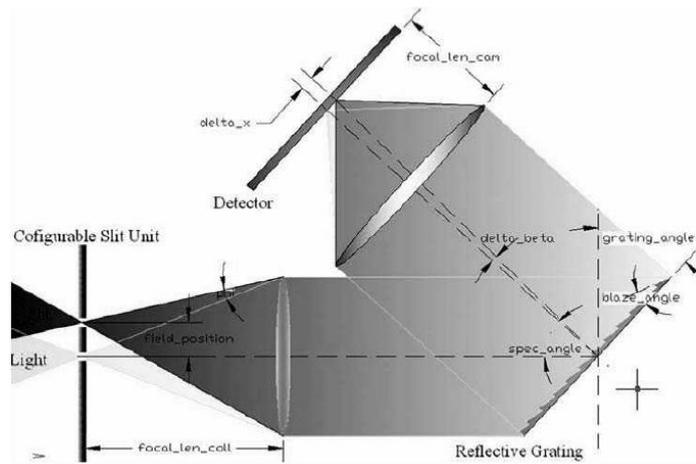


図3 分光器

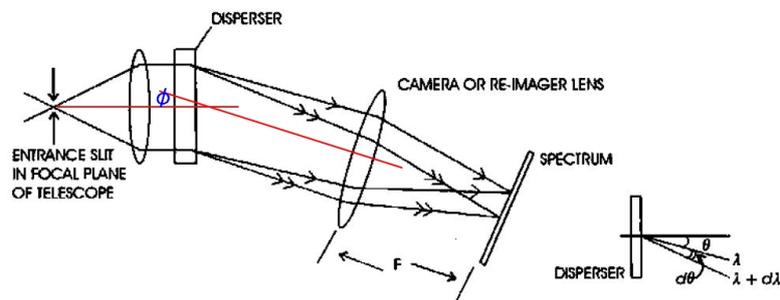


図4 分光器(再掲)

- ビームサイズ D_{coll} は角度 i で入射するので、回折格子上で照らされる長さは $W = D_{coll} / \cos i$
- 倍率は f_{cam} / f_{coll}
- 実用上、コリメータとカメラを固定した方がよい \rightarrow コリメータとカメラから見た”視軸”ができる。その交わる角度を φ とする(上図)。

*6 高次の回折光を用いるために迷光 (stray light) の影響を受けやすく、回折格子は精密に作る必要がある。

Rowland Circle(ローランド円)

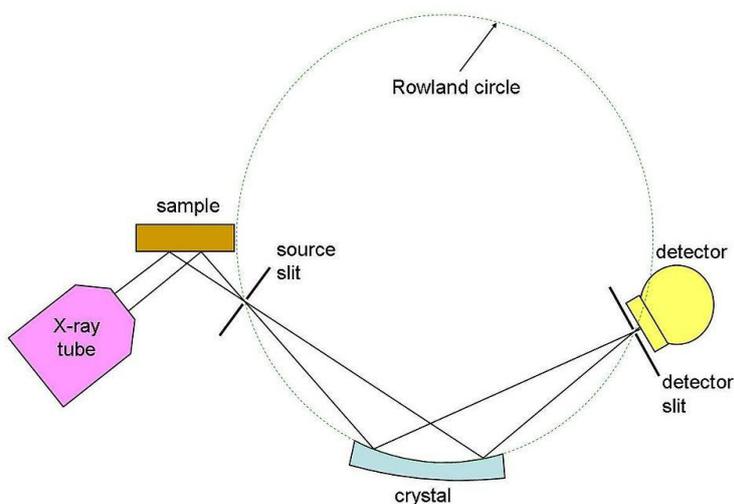


図5 Rowland Circle

- 凹球面鏡 (concave spherical mirror) を用いる。
- 分散と focus を同時にできる
- 再結像の際の色収差を除外できる
- 透過レンズが得づらい FUV に最適

角度による倍率

角度 i, θ によって倍率は変わる。そのファクタは

$$\frac{d\theta}{di} = \left| \frac{\cos i}{\cos \theta} \right| \quad (8)$$

となる。^{*7} よって検出器のスリット幅は

$$\Delta x = w \frac{\cos i}{\cos \theta} \frac{f_{cam}}{f_{coll}} \quad (9)$$

となる。^{*8}

^{*7} コリメータ・カメラのレンズまでの距離を同じとする。スリット幅を w 、検出器のスリット幅を Δx 、回折格子にできる像の長さを l とすると、

$$\begin{aligned} l &= \frac{w}{\cos \theta} \\ &= \frac{\Delta x}{\cos i} \end{aligned}$$

となるので、 $\Delta x/w = \cos i / \cos \theta$ 。

^{*8} $i < \theta$ ならコリメータの方が回折格子に近い。 $\theta > i$ ならカメラの方が回折格子に近い。

分解能

$$\begin{aligned}
 R &= mN \\
 &= \frac{mW}{d} \\
 &= \frac{W(\sin i + \sin \theta)}{\lambda}
 \end{aligned} \tag{10}$$

*9 スリット幅は実用上スリット幅の限界/シーイングの限界に一致する。(後者の場合) スリットが seeing disk の角の大きさ θ_{see} に一致するとき、 $\theta_{see} = \lambda/D_{tel}$

$$R = \frac{W(\sin i + \sin \theta)}{\theta_{see} D_{tel}} \tag{11}$$

となる。 D_{tel} を大きくしても R が小さくならないには、回折格子のサイズ W も大きくする必要がある。 p をスリット像に対応するピクセル数として

$$\begin{aligned}
 \theta_{see} &= p \times \theta_{pix} \\
 W &= \frac{D_{coll}}{\cos i}
 \end{aligned}$$

の2式より

$$R = \left(\frac{\sin i + \sin \theta}{\cos i} \right) \frac{D_{coll}}{D_{tel}} \underbrace{\frac{206,265}{p\theta_{pix}}}_{\text{秒角に直している}} \tag{12}$$

この式から、望遠鏡が大きくなると (D_{tel} が大きくなると)、分光器も大きくなる (D_{coll} も大きくなる) ことが分かる。

*9 N は照らされてる溝 (grooves) の総数。

強度分布

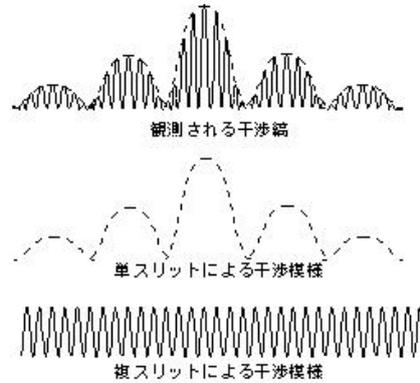


図 6 強度分布

矩形開口の回折から

$$I = A_0^2 \underbrace{\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}}_{\text{単スリット}} \underbrace{\frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2 \gamma}}_{\text{複スリット}} \quad (13)$$

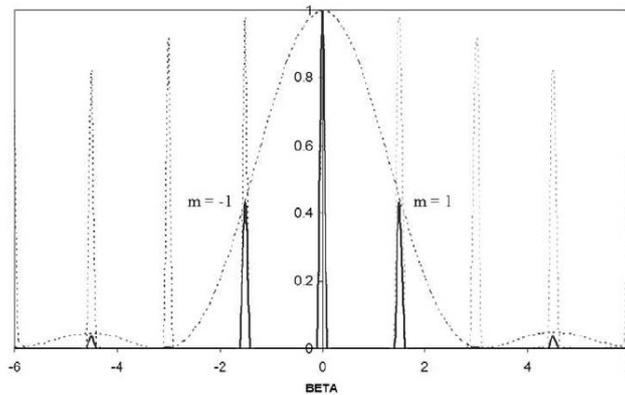


図 7 強度分布

- $\gamma = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$, d :スリット同士の間隔
- $\beta = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$, b :スリットの幅

複スリットによる項は、 $\gamma = 0, \pi, 2\pi, \dots$ すなわち $d \sin \theta = 0, \lambda, 2\lambda, \dots = m\lambda$ のとき、 N^2 となる。^{*10}
 $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ となると値は小さくなる。 $m = 0$ (分散が起きない)にあるピークを $m = 1$ (分散が起きる)にズラしたい。

^{*10} $\sin \gamma \sim \gamma$

Blaze angle(ブレース角)

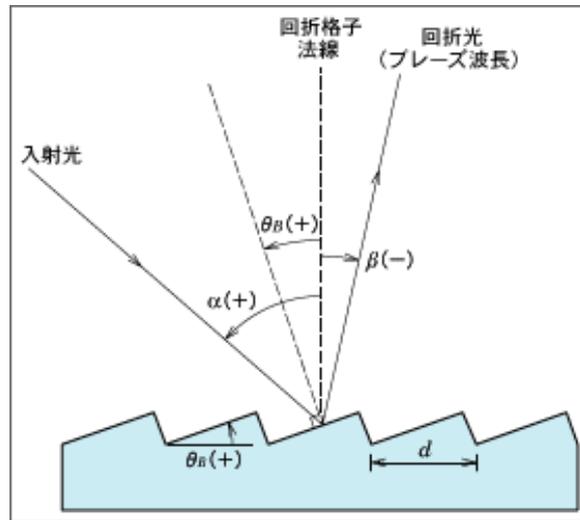


図8 ブレース角

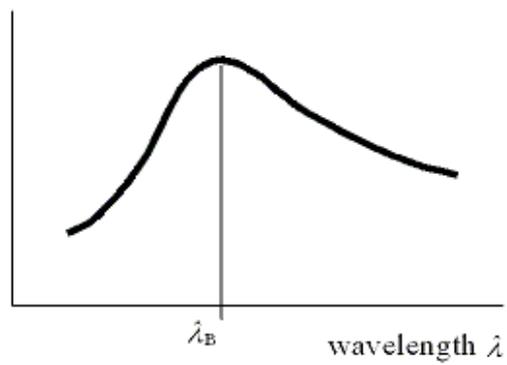


図9 効率

上図のように配置すると、回折効率を最大にできる。^{*11} $(i + \theta) = 2\theta_B$ 、 $(i - \theta) = \varphi$ だから、ブレース波長 λ_B は

$$\begin{aligned}
 m\lambda_B &= d(\sin i + \sin \theta) \\
 &= 2d \sin \left(\frac{i + \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{i - \theta}{2} \right) \\
 &= 2d \sin \theta_B \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

となる。

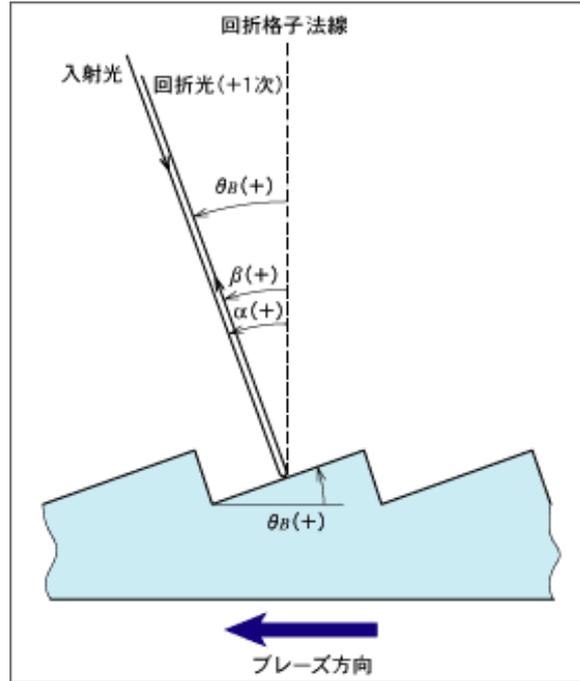


図 10 リトロ条件

Littrow condition(リトロ条件)

$\varphi = 0$ の場合、入射光はそのまま同じ方向に進んでいく。これを Littrow condition と呼ぶ。このとき、

$$m\lambda_B = 2d \sin \theta_B \quad (15)$$

となる。 $i = \theta = \theta_B$ なので、分解能は

$$R = \left(\frac{\sin i + \sin \theta}{\cos i} \right) \frac{D_{coll}}{D_{tel}} \underbrace{\frac{1}{p\theta_{pix}}}_{\text{秒角に直してはいない}} \quad (16)$$

$$= \frac{2D_{coll} \tan \theta_B}{p\theta_{pix} D_{tel}}$$

となる。このままでは同じ方向に光が戻ってくるので、少しズラしたい。そこで γ だけ考えている面から光をズラして入射させる。その場合、生じる像が χ だけ傾いた状態になる。(quasi Littrow condition) その際の関係式は

$$\tan \chi = \tan \gamma \frac{\sin i + \sin \theta}{\cos \theta} \quad (17)$$

となる。^{*12}

*11 ここでは α が i 、 β が θ に相当する。

*12 導出は分かりませんでした。

Free Spectral Range(自由スペクトル領域)

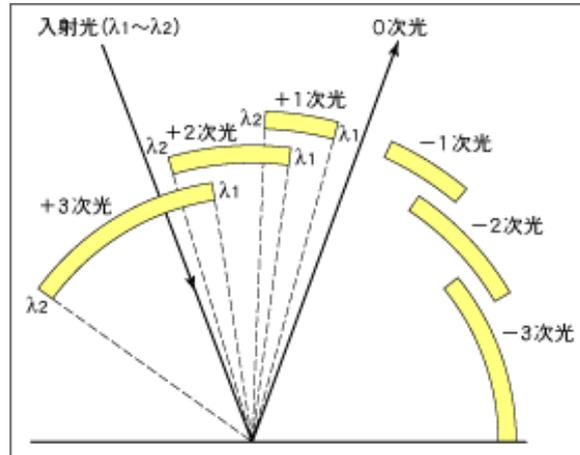


図 11 自由スペクトル領域

波長 λ の $m + 1$ 次光と波長 λ' の m 次光が同じ方向で重なったとき、

$$(m + 1)\lambda = m\lambda' \quad (18)$$

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ は

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \quad (19)$$

となる。 $\lambda \pm \Delta\lambda$ では光が重ならないと考えることができる。したがって観測波長が自由スペクトル領域を超過する場合は order overlap を防ぐためにフィルターを設置する必要がある。

回折格子の効率の計算は難しいが、 $\lambda_+ = \frac{2m\lambda_B}{2m+1}$, $\lambda_- = \frac{2m\lambda_B}{2m-1}$ のとき、回折格子の効率は 40% に落ちる。^{*13}

^{*13} 理由は分かりませんでした。ちなみに m が大きいとき、

$$\begin{aligned} \lambda_+ - \lambda_- &= \frac{4m\lambda_B}{4m^2 - 1} \\ &\simeq \frac{\lambda_B}{m} \\ &= \Delta\lambda_B \end{aligned} \quad (20)$$

λ_B を観測波長の中心に据える場合、 λ_{\pm} が 1 つの基準になるという意味だと思います。

VPH 回折格子

VPH (Volume Phase Holographic) 回折格子は複数の層によってコーティングされ、回折格子中で周期的に屈折率が変化するものである。 i 番目の層において、

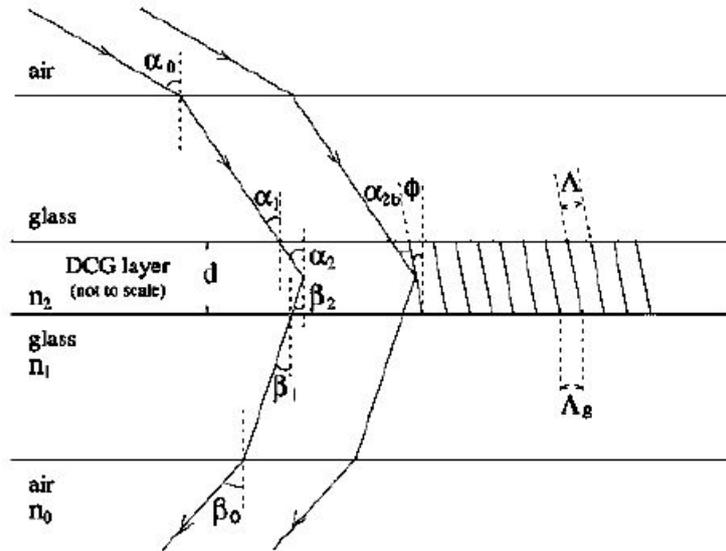


図 12 VPH 回折格子. $i = 0$ が空気、 $i = 1$ がガラス、 $i = 2$ が dichromated gelatine (DCG) がトラップされた層

$$m\lambda = n_i \Lambda_g (\sin \alpha_i + \sin \beta_i) \quad (21)$$

- n_i : 媒質中の屈折率
- Λ_g : grating period (溝の幅)
- α_i : 入射角
- β_i : 分散角

DCG 層で効率よく反射されるには、 $\alpha_2 - \phi = \beta_2 + \phi$ が必要。^{*14}このとき、

$$m\lambda = 2n_2 \Lambda \sin \alpha_{2b} \quad (22)$$

- n_2 : DCG の屈折率
- $\alpha_{2b} = \alpha_2 - \phi$

^{*15}上の状況では分散は起きない。DCG の層はゼラチンを水で膨らませ、早く乾燥させることで密度に変化が起きている。 $\Lambda = 1/v_g$ のスケールで変化するとして、 Δn_2 を屈折率の変化分と考えると、

$$n_2(x, z) = n_2 + \Delta n_2 \cos \{2\pi v_g (x \sin \gamma + z \cos \gamma)\} \quad (23)$$

^{*14}これは X 線を結晶内に入射させたとき、ある角度の場合だけよく反射が起こるが別の角度では反射がほとんど起こらないことに類似している。

^{*15}2 のファクタは DCG 内部で分散がちょうど真ん中で起きていることに由来すると考えられる。

となる。 γ は z 軸と波面がなす角度である。^{*16*17*18}

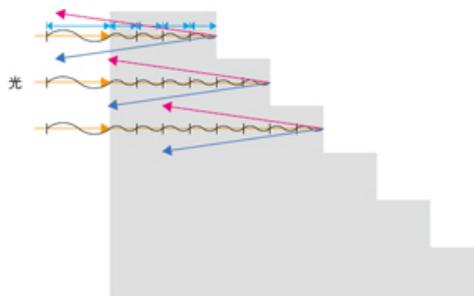
immersion grating(イメージョン回折格子)



写真 イメージョン・グレーティングの試作品

図 13 イメージョン回折格子

図 2 イメージョン・グレーティング



回折格子の先端にプリズムをつけ、光に屈折率 n の中を通らせることで干渉させるもの。

$$m\lambda = 2dn \sin \theta \quad (24)$$

- d : 回折格子の厚み
- θ : 反射角

屈折率の分だけ波長が短くなる。波長が短くなると回折格子に狭い範囲に溝をたくさん並べることができる。よって、小さな分光器でも高い分解能を得ることができる。

^{*16} 線密度 $v_g = 300 - 6000$ [lines/mm]、屈折率の変化分 $\Delta n_2 = 0.02 - 0.1$ が典型的な値である。

^{*17} 波長が変われば角度も変わるので、カメラの配置も変更する必要がある。

^{*18} 6dF にも VPH 回折格子が使われている。

プリズム

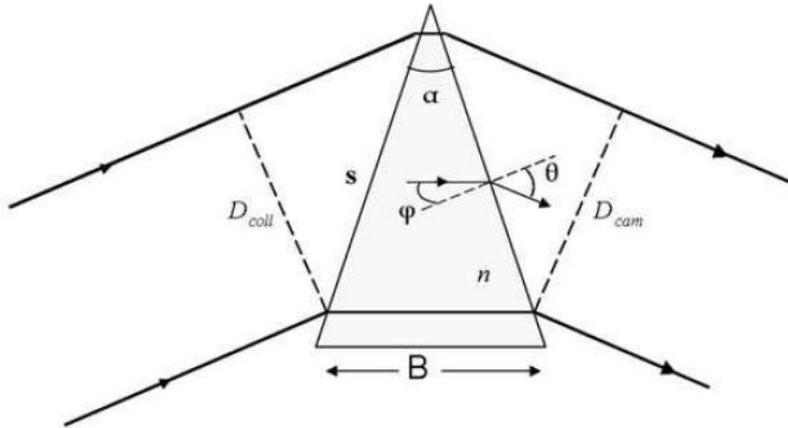


図 14 プリズム

- 安い。また、回折格子より作りやすい
- order overlap がない
- 波長によって分解能が大きく変わってしまう

角分散は

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\lambda} &= \frac{d\theta}{n} \frac{n}{d\lambda} \\ &= \frac{B}{D_{cam}} \frac{n}{d\lambda} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。^{*19}

^{*19} まず、Snell の法則により

$$n \sin \varphi = \sin \theta \quad (26)$$

次に、 $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ を代入すると、

$$\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) dn = \cos \theta d\theta \quad (27)$$

である。2 回屈折していることを考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dn} &= \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \theta} \\ &= \frac{2s \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{s \cos \theta} \end{aligned} \quad (28)$$

$B = 2s \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right), D_{cam} = s \cos \theta$ より

$$\frac{d\theta}{dn} = \frac{B}{D_{cam}} \quad (29)$$

プリズムの分解能は

$$R = B \frac{dn}{d\lambda} \quad (30)$$

で与えられ、slit-limited な装置では

$$R = \frac{\lambda}{\theta_{res} D_{tel}} B \frac{dn}{d\lambda} \quad (31)$$

となる。^{*20}

グリズム

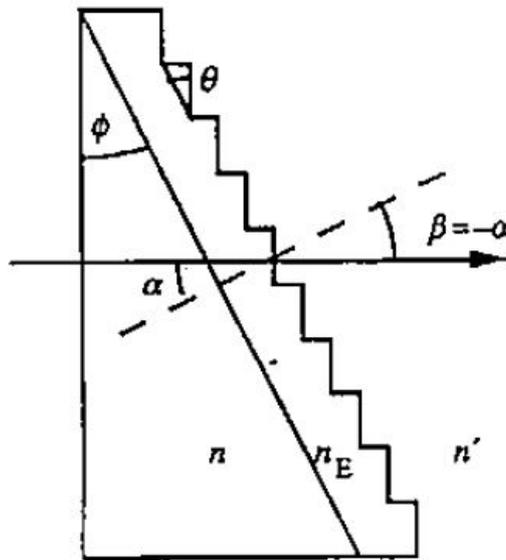


図 15 グリズム

$$m\lambda_C = d(n \sin \alpha + \sin \beta) \quad (33)$$

図から

$$\alpha = -\beta = \theta = \phi \quad (34)$$

よって

$$m\lambda_C = d(n - 1) \sin \theta \quad (35)$$

$T = 1/d$ とすると

$$m\lambda_C T = (n - 1) \sin \phi \quad (36)$$

^{*20} 分解能の

$$\theta_{resolution} = 1.22 \frac{\lambda}{D_{tel}} \quad (32)$$

あたりの話と関連がありそうですが、プリズムの分解能の 2 式がなぜこの式で与えられるかが分かりません。

となる。また、分解能は

$$R = \frac{EFL}{2d_{pix}}(n - 1) \tan \phi \quad (37)$$

- $EFL = m f_{tel}$ (m:magnification):実効焦点距離
- d_{pix} :ピクセルサイズ
- ファクター 2 は 2 個のピクセルがスリット幅に対応していることによる

となる。^{*21*22}

5.3 Polarimeters(旋光計)

- 一部の例外を除き^{*23}、天文学では偏光のレベルはかなり低い。^{*24}
- 天体現象の「地理」が分かるため、偏光は重要
- 偏光を明るさの変化に変換して直接検出する

5.3.1 Modulators and polarizer(変調器と偏光板)

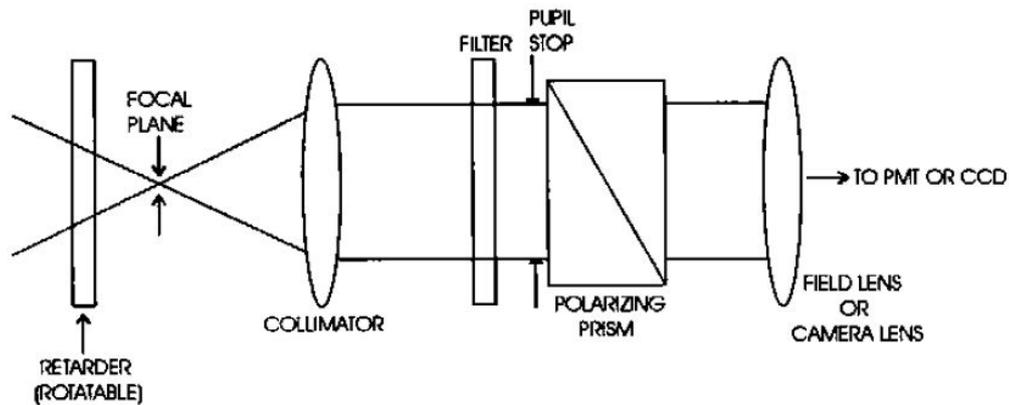


図 16 modulator and polarizer

Modulator(変調器)

- 複屈折 (birefringence) と呼ばれる性質を示す結晶構造の物質から構成される、回転可能な板。
- 結晶がある方向に振動している電磁場を「弱める」
- 外部からの手段で複屈折を起こす
- そして偏光板が後に続く

^{*21} ϕ は ϕ の誤植だと思います。分解能の式がどうしてこうなるのかわかりませんでした。

^{*22} 典型的には $R \sim 500 - 2000$

^{*23} 反射星雲、超新星爆発からのシンクロトロン放射、磁化白色矮星系からのサイクロトロン放射

^{*24} 星間物質によって数 % の直線偏光、円偏光はもっと少ない。

Polarizer(偏光板)

偏光板を回転させるのが一番単純な方法だが...

移相子 (retarder)

入射光の位相を遅らせる。Δ だけ遅らせるとすると、

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

固定された偏光子 (polarizer)

例えば x 軸に平行な光のみ通す偏光素子を考える。光が x 軸と θ をなしているとき、(E cos θ, E sin θ) の光が (E cos θ, 0) になるのだから、強度は I = E² から I' = E² cos² θ になる。以上の 2 つの組み合わせによって偏光板を回転させる必要はなくなる。

- 移相子は 2 つの異なる屈折率を持つ複屈折の物質を組み合わせることで achromatic にすることができる*25
- 移相子は望遠鏡のレンズの次に配置する ← 装置由来の偏光を最小限にするため
- 偏光子は (分散回折格子といった) 部分的に偏光させる素子より先に配置する
- double-beam device というものもある*26

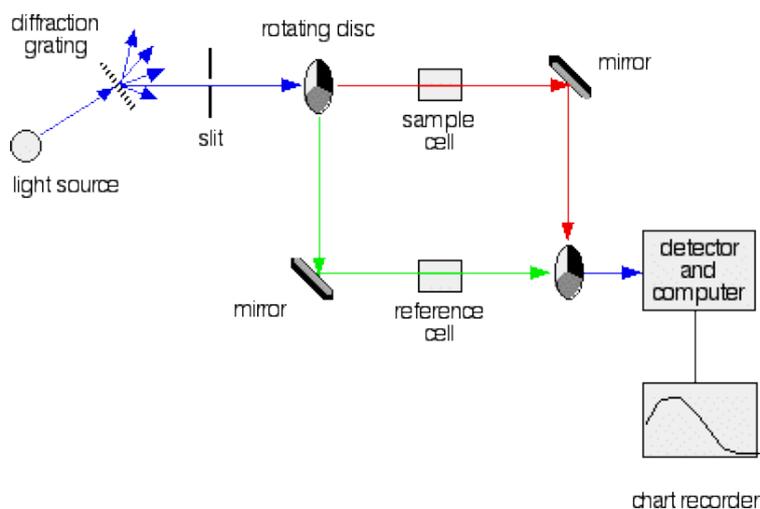


図 17 double-beam

5.3.2 The Stokes parameters

- I: 合計の強度
- Q: 縦横に偏光している度合
- U: ±45° に偏光している度合
- V: 円偏光の度合 (左右回転)

*25 ?

*26 大気などの影響を打ち消せるらしい?

である。具体的には下図を参照。また、直線偏光の程度 p 、円偏光の程度 q を

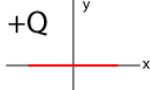
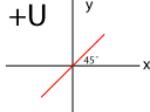
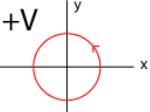
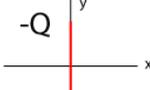
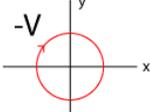
100% Q	100% U	100% V
<p>+Q</p>  <p>$Q > 0; U = 0; V = 0$ (a)</p>	<p>+U</p>  <p>$Q = 0; U > 0; V = 0$ (c)</p>	<p>+V</p>  <p>$Q = 0; U = 0; V > 0$ (e)</p>
<p>-Q</p>  <p>$Q < 0; U = 0; V = 0$ (b)</p>	<p>-U</p>  <p>$Q = 0; U < 0; V = 0$ (d)</p>	<p>-V</p>  <p>$Q = 0; U = 0; V < 0$ (f)</p>

図 18 Stokes parameters

$$p = \frac{(Q^2 + U^2)^{\frac{1}{2}}}{I}$$

$$q = \pm \frac{V}{I} \quad (39)$$

で定義し、直線偏光の部分の振動方向を

$$\tan 2\theta = \frac{U}{Q} \quad (40)$$

で定義すると、

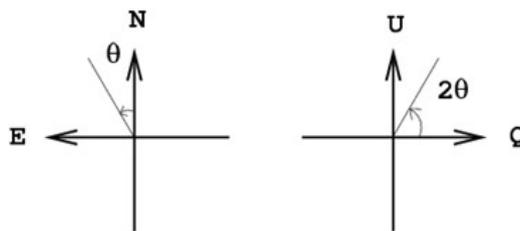


図 19 Stokes parameters

$$Q = Ip \cos 2\theta$$

$$U = Ip \sin 2\theta$$

$$V = Iq \quad (41)$$

となる。^{*27}

^{*27} 次からしばらく続く議論は全く分かりませんでした。後半は $V = 0$ としたときに偏光後の強度 I' から I, Q, U を逆算することでやってきた光の偏光情報を求めているようです。

5.3.3 Mueller matrices

ある素子を光が通過するごとに、Stokes parameters S が偏光されていく。その偏光の仕方を Mueller 行列 M で表す。 n 個の素子を通過したとき、

$$S' = M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1 S \quad (42)$$

移相子による行列は

$$\begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G + H \cos 4\psi & H \sin 4\psi & -\sin \tau \sin 2\psi \\ 0 & H \sin 4\psi & G - H \cos 4\psi & \sin \tau \cos 2\psi \\ 0 & \sin \tau \sin 2\psi & -\sin \tau \cos 2\psi & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (43)$$

ただし $G = \frac{1}{2}(1 + \cos \tau)$, $H = \frac{1}{2}(1 - \cos \tau)$ 。これに偏光子の部分がかかるのだが、Ideal では $k = \frac{1}{2}$ で、5.2.2 節の式が出てきそうな予感がする (図参照)。ある素子が違う素子に対して ψ 角

<p>• Half-wave oriented at 0° or 90°</p> $k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	<p>• Half-wave oriented at $\pm 45^\circ$</p> $k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
---	---

図 20 Mueller matrix

度が違うとき、

$$M' = R(-\psi) M R(\psi) \quad (44)$$

ただし

$$R(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ 0 & -\sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

とすれば簡単に議論が行える。最初に ψ 回転して、 M を作用して、次に $-\psi$ 回転して元に戻っている。

<ul style="list-style-type: none"> • Quarter-wave oriented at 0° $k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> • Quarter-wave oriented at $\pm 45^\circ$ $k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
---	---

☒ 21 Mueller matrix